第２講　図形と方程式

1　$a>b>0$ とする．円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b, \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点をＰとする．また，円の外部の点 (b, c) からこの円に２本の接線を引き，接点をＱ，Ｒとする．このとき，２点Ｑ，Ｒを通る直線はＰを通ることを示せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P，Q をもち，P と Q の x 座標の差の絶対値は 1 である．ただし，$a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする．

(1) d を a を用いて表せ．

(2) d を最大にする a と b の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

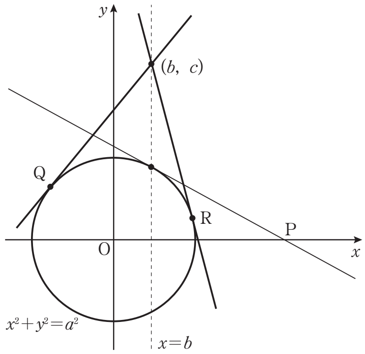
3　放物線 $y = x^2 + 4x$ 上に直線 OP に関して対称な異なる 2 点が存在する．この条件を満たす点 P の存在する範囲を図示せよ．ただし，O は原点である．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第２講　図形と方程式

1　$a>b>0$ とする．円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする．また，円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に２本の接線を引き，接点を Q，R とする．このとき，２点 Q，R を通る直線は P を通ることを示せ．



$x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線の方程式は

$bx+\sqrt{a^2-b^2}\,y=a^2$　　よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$

$\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ とすると点 Q，R における円の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=a^2$，　$x_2x+y_2y=a^2$　となる．

これらがともに $(b,\ c)$ を通るので

$x_1b+y_1c=a^2$，　$x_2b+y_2c=a^2$

つまり $\begin{cases} bx_1+cy_1=a^2 \\ bx_2+cy_2=a^2 \end{cases}$

これらは点 Q，R が直線 $bx+cy=a^2$ 上にあることを示す．よって，直線 QR の方程式は

$bx+cy=a^2$

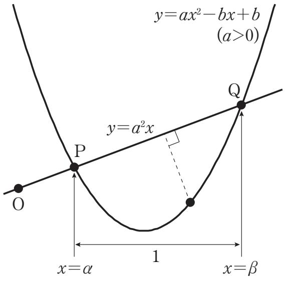
この直線と x 軸との交点は $\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ であり，これは P の座標と一致する．

ゆえに２点 Q，R を通る直線は P を通る．

2　放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は２交点 P，Q をもち，P と Q の x 座標の差の絶対値は１である．ただし，$a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする．

(1)　d を a を用いて表せ．

(2)　d を最大にする a と b の値を求めよ．



(1)　放物線と直線の交点の x 座標は　$ax^2-bx+b=a^2x$ の解

つまり　$ax^2-(a^2+b)x+b=0$　…① の２解である．

この２解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると　$\beta-\alpha=1$ ……②

弧 PQ 上の点 $(t,\ at^2-bt+b)$ と直線 $a^2x-y=0$ の距離は

$$\frac{|a^2t-at^2+bt-b|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{|-a(t-\alpha)(t-\beta)|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{-a(t-\alpha)(t-\beta)}{\sqrt{a^4+1}}$$

$\begin{pmatrix} -a<0 \\ \alpha\leqq t\leqq\beta \end{pmatrix}$　これが最大となるのは $t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき

ゆえに　$d=\dfrac{-a\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)}{\sqrt{a^4+1}}=\dfrac{a(\beta-\alpha)^2}{4\sqrt{a^4+1}}=\boldsymbol{\dfrac{a}{4\sqrt{a^4+1}}}$　（②より）

(2)　$d=\dfrac{a}{4\sqrt{a^4+1}}=\dfrac{1}{4\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$　（$a>0$ より）

$a^2>0$ より　$a^2+\dfrac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}=2$　等号成立は　$a^2=\dfrac{1}{a^2}$　つまり　$a=1$ のとき

ゆえに　$d\leqq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ であり，$a=1$ のとき d は最大となる．

このとき ①より　$x^2-(b+1)x+b=0$　　$x=b,\ 1$

$b>1$ のとき，②より　$b-1=1$　　$b=2$

$b<1$ のとき，②より　$1-b=1$　　$b=0$

よって，d を最大にする a，b は $(a,\ b)=\mathbf{(1,\ 0),\ (1,\ 2)}$

3　放物線 $y=x^2+4x$ 上に直線 OP に関して対称な異なる 2 点が存在する．この条件を満たす点 P の存在する範囲を図示せよ．ただし，O は原点である．

A$(\alpha,\ \alpha^2+4\alpha)$，B$(\beta,\ \beta^2+4\beta)$ とする　$(\alpha<\beta)$

x 軸，y 軸に関して対称な点はないので，OP：$y=mx$（$m\neq 0$）とおく．

OP に関して点 A と点 B が対称のとき

AB ⊥ OP より　$\dfrac{(\beta^2+4\beta)-(\alpha^2+4\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot m=-1$　　よって　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{m}-4$　……①

AB の中点が OP 上より　$\dfrac{(\alpha^2+4\alpha)+(\beta^2+4\beta)}{2}=m\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(m-4)(\alpha+\beta)$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2+(4-m)(\alpha+\beta)\}=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+4-m)$

これに①を代入して整理すると　$\alpha\beta=\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}$　……②

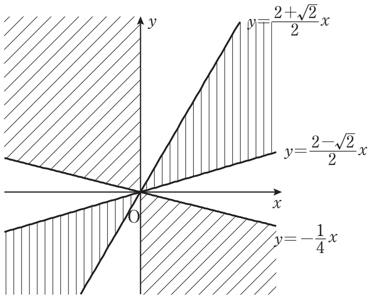
①，②より α，β は 2 次方程式　$X^2+\left(\dfrac{4m+1}{m}\right)X+\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}=0$　の 2 解である．

実数条件より　$\left(\dfrac{4m+1}{m}\right)^2-4\cdot\dfrac{(4m+1)(m^2+1)}{2m^2}>0$　　$(4m+1)(2m^2-4m+1)<0$

ゆえに　$m<-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

点 P はこの範囲にある m を傾きにもつ直線 OP 上に存在する．

よって，点 P の存在する範囲は右図斜線部分．（境界含まない）



第２講　図形と方程式　練習問題

1　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える．C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく．また P と l との距離を d とおく．

(1)　d，s，t をそれぞれ a の式で表せ．また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ．

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ．

2　不等式 $2y > x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする．実数 a に対して，放物線 C を $y=x^2-2ax+a^2+a+2$ で定める．このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ．

第２講　図形と方程式　　練習問題　解答

1　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ を考える．C 上の点 $(x,\ y)\left(\text{ただし } 0 < x < \dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく．また P と l との距離を d とおく．

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ．また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ．

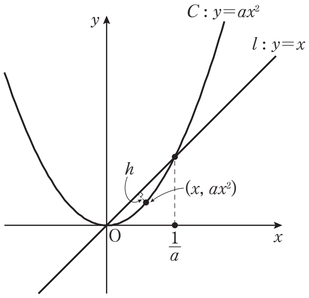
(2)　実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ．

解答例

(1)　直線 $l : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ の交点の x 座標は $x = 0,\ \dfrac{1}{a}$ である．

C 上の点 $(x,\ ax^2)$ と直線 $l : x - y = 0$ との距離 h は

$0 < x < \dfrac{1}{a}$ においては，$x > ax^2$ であることより



絶対値をグラフや条件から「はずす」

$$h = \frac{|x - ax^2|}{\sqrt{2}} = \frac{x - ax^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a}\right\}$$

である．

$-a < 0$ より，$0 < x < \dfrac{1}{a}$ において h は $x = \dfrac{1}{2a}$ のとき最大となる．

よって　$\boldsymbol{d = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{4a} = \dfrac{\sqrt{2}}{8a}}$，$\boldsymbol{s = \dfrac{1}{2a}}$，$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{4a}}$

また，$C : y = ax^2$ より　$y' = 2ax$

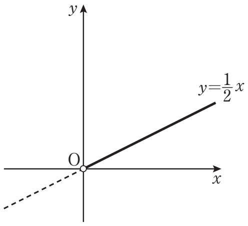
したがって，P における放物線 C の接線の傾きは　$2a \cdot \dfrac{1}{2a} = \mathbf{1}$

(2)　軌跡を求める点 P の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X = \dfrac{1}{2a}$ であり，$a > 0$ より $X > 0$．また，$Y = \dfrac{1}{4a}$ である．

よって，$Y = \dfrac{1}{2}X$ より，求める軌跡は　直線 $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x\ (x > 0)}$

図示すると，右図実線部分．



2　不等式 $2y > x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする．実数 a に対して，放物線 C を $y=x^2-2ax+a^2+a+2$ で定める．このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ．

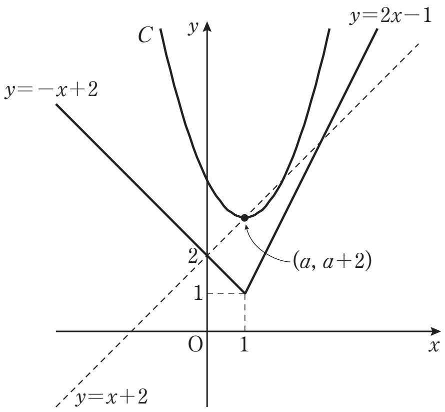
解答例

$D: 2y > x+1+3|x-1|$ の境界線は $y=\dfrac{x+1+3|x-1|}{2}=\begin{cases}-x+2 & (x<1)\\ 2x-1 & (1\leqq x)\end{cases}$ ……①である．

よって，題意を満たすのは $C: y=x^2-2ax+a^2+a+2=(x-a)^2+a+2$ がすべて①より上側に存在するときである．

グラフの「動き」を「軌跡」から得る

C の頂点は $y=x+2$ 上（右図点線部分）にある．



$x^2-2ax+a^2+a+2=-x+2$ より

$x^2-(2a-1)x+a^2+a=0$ ……②

この方程式の判別式を D_1 とすると

$D_1=(2a-1)^2-4(a^2+a)=-8a+1$

$x^2-2ax+a^2+a+2=2x-1$ より

$x^2-2(a+1)x+a^2+a+3=0$ ……③

この方程式の判別式を D_2 とすると

$\dfrac{D_2}{4}=(a+1)^2-(a^2+a+3)=a-2$

②が重解をもつのは　$D_1=0$　つまり　$a=\dfrac{1}{8}$ のとき

このとき，$D_2<0$ より D の境界線と C は接点以外の共有点をもたない．

③が重解をもつのは　$D_2=0$　つまり　$a=2$ のとき

このとき，$D_1<0$ より D の境界線と C は接点以外の共有点をもたない．

以上より，グラフから求める a の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{8}<a<2}$

ただし，直線の傾き具合からこちらは明らかである．グラフから判断が困難な状況では「調べた」という事実を解答に残すことを心がけること．